



La Ingeniería Estructural, motor del desarrollo en América, en un marco de Integración y Sustentabilidad

CÁLCULO DE FLECHAS EN VIGAS DE HORMIGÓN ARMADO UTILIZANDO DIAGRAMA MOMENTO - CURVATURA

CALCULATION OF DISPLACEMENTS IN REINFORCED CONCRETE BEAMS USING MOMENT-CURVATURE DIAGRAM

Fredy G. Ramírez (P) (1); Osvaldo R. Romero (2); Sergio D. Cardozo (3)

(1) Ing. Civil, Docente, Facultad de Ciencias y Tecnologías UNCA, Cnel. Oviedo, Paraguay.
Masterando, Facultad de Ingeniería UNA, Asunción, Paraguay.

(2) Ing. Civil, Docente, Facultad de Ciencias y Tecnologías UNCA, Cnel. Oviedo, Paraguay.
Masterando, Facultad de Ingeniería UNA, Asunción, Paraguay.

(3) Ing. Civil, M.Sc. Facultad de Ingeniería UNA, Asunción, Paraguay.

Resumen

El cálculo de desplazamientos en vigas de hormigón armado ha sido largamente estudiado, presentándose diversas teorías, desde las más elementales hasta realizaciones bastante elaboradas en simulaciones computacionales con softwares de primer nivel. En este trabajo se presenta una alternativa, que los autores consideran suficientemente práctica como para adoptarla en cálculos de ingeniería. Se introduce un algoritmo para la obtención del diagrama momento - curvatura de vigas de hormigón armado, el cual es utilizado para la determinación de la rigidez EI en el proceso de cálculo de desplazamientos en vigas estáticamente determinadas, esta rigidez es variable con lo que de esta manera se está considerando la no linealidad material. Los ejemplos se basan en secciones rectangulares pero es fácilmente adaptable a secciones simétricas respecto a un eje vertical que pasa por su centro de área. Todo el proceso de cálculo se tiene en una rutina computacional realizada en Python 3.5. Finalmente se comparan los resultados con otros dos estudios sobre el tema mostrando la excelente aproximación obtenida.

Palabras clave: momento-curvatura, no linealidad material, hormigón armado, flechas

Abstract

The calculation of displacements in reinforced concrete beams has been extensively studied, there are several theories, from the most basic to quite elaborate achievements using computer simulations with top-level softwares. In this paper it's presented an alternative, the authors consider it practical enough to adopt in engineering calculations. It's introduced an algorithm for obtaining diagram moment-curvature of reinforced concrete beams, which is used for determining stiffness EI in the process of calculating deflections in statically determinate beams, this rigidity is variable so that, in this way, it is considering the material non-linearity. The examples are based on rectangular sections but is easily adaptable to symmetrical sections about a vertical axis through its center area. The entire calculation process is taken into a computational routine done in Python 3.5. Finally it is compared the results with two other studies on the same subject showing the excellent approximation obtained.

Keywords: moment-curvature, material non-linearity, reinforced concrete, deformations



La Ingeniería Estructural, motor del desarrollo en América, en un marco de Integración y Sustentabilidad

1. INTRODUCCIÓN

Para la verificación de los estados límites de servicio, en particular al referente a los desplazamientos en las vigas de hormigón armado, existe, en primera aproximación, la teoría elemental de la mecánica de materiales, y por el otro extremo, desarrollos matemáticos bastante elaborados para considerar los múltiples fenómenos que presenta el hormigón armado, que se muestra cada vez más complejo a medida que avanzan los estudios en este campo. Sin embargo, en este trabajo, se pretende mostrar que es posible llegar a una muy buena aproximación, considerando la no linealidad material hormigón armado, reuniendo la información, de su naturaleza compuesta, en una sola curva, la de momento - curvatura.

El diagrama de momento - curvatura, es un recurso que ha mostrado ser muy útil a la hora de calcular deformaciones, el problema central es obtener el momento de inercia efectivo para la verificación de los estados límites de servicio. Por ser el hormigón armado un material compuesto, sin embargo su obtención tampoco resulta ser del todo práctica considerando las diversas teorías que se enfrentan al problema, por ejemplo la presentada por Branson (1977).

Como alternativa se presenta un sencillo algoritmo para la obtención del diagrama momento - curvatura que se basa, primordialmente, en la hipótesis de secciones planas antes y después de la deformación. Para ser completamente coherentes en nuestra formulación, adoptamos la hipótesis de Euler-Bernoulli, las secciones planas y perpendiculares al eje de la mantienen esa condición luego de la deformación. Este algoritmo se basa sencillamente en suponer el giro de estas secciones buscando la profundidad de la línea neutra, tal que se anule la resultante de las fuerzas axiales, de manera a llegar a la situación de flexión pura que luego es relacionada con la curvatura de la sección considerada. Para modelar el hormigón y el acero, nos basamos en el EC2:2004. Hemos verificado que los resultados se ajustan bastante bien a teorías más elaboradas y puede también identificarse perfectamente, los estadios de deformación del hormigón.

Una vez obtenido el diagrama de momento - curvatura se lo aplica al cálculo de desplazamientos, en el cual se utiliza un modelo sencillo de elemento finito y como verificación, también se revisan los cálculos con el método de la carga unitaria, basado la teoría de los trabajos virtuales. En el proceso de cálculo se parte del diagrama de momento flector de la viga considerada, (por lo tanto, acá se presenta solo casos de vigas estáticamente determinadas), luego el momento flector de cada sección es relacionado con la curvatura, según el diagrama de momento - curvatura, con lo cual es obtenido el factor EI que es utilizado siguiendo el proceso normal de cálculo de elementos finitos lineales y/o trabajo virtual lineal, pero nótese que en cada situación varía el valor de EI , por lo que, de esta forma, se está considerando la no linealidad del material.

Para corroborar la exactitud de nuestros resultados, verificamos finalmente nuestros resultados con dos estudios anteriores, el primero, lo comparamos con un estudio realizado con un software de elementos finitos y el segundo con resultados de ensayos experimentales.



La Ingeniería Estructural, motor del desarrollo en América, en un marco de Integración y Sustentabilidad

2. DIAGRAMA DE MOMENTO - CURVATURA

2.1. Modelo constitutivo del hormigón

2.1.1. Hormigón a compresión

Se utiliza el diagrama propuesto por el EC2:2004 para el análisis estructural, el cual se define con las siguientes relaciones:

$$\sigma_c = \begin{cases} f_{cm} \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} & \text{si } 0 \geq \varepsilon_c > \varepsilon_{cu1} \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

$$k = 1,05 E_{cm} \frac{|\varepsilon_{c1}|}{f_{cm}}; \quad \eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}; \quad f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ (MPa)} \quad (1)$$

$$E_{cm} = \underbrace{1,2}_{\text{basalto}} \times 22 \left[\frac{f_{cm}}{10} \right]^{0,3} \text{ (GPa)} \quad (f_{cm} \text{ en MPa})$$

$$\varepsilon_{c1} = 0,7 f_{cm}^{0,31} \leq 2,8 \text{ (\%)}$$

Donde:

- σ_c : tensión de compresión del hormigón.
- $\varepsilon_c \in [\varepsilon_{cu1}, 0]$: deformación unitaria del concreto a compresión, ($\varepsilon_c \leq 0$).
- $\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}$ (siendo ε_c y ε_{c1} ambas menores que 0)
- ε_{c1} : deformación unitaria correspondiente a la tensión máxima f_{cm} , en las fórmulas entra con valor negativo.
- $\varepsilon_{cu1} = -3,5 \text{ ‰}$: deformación unitaria última a compresión del hormigón.
- f_{cm} : resistencia media a la compresión a los 28 días.
- E_{cm} : módulo de elasticidad secante, el cual está definido por $\sigma_c = 0$ y $\sigma_c = 0,4 f_{cm}$. El factor 1,2 que aparece en su fórmula es debido a que en Paraguay el agregado grueso más utilizado es el basáltico¹.

¹EC2:2004 3.1.3 (2)



La Ingeniería Estructural, motor del desarrollo en América, en un marco de Integración y Sustentabilidad

2.1.2. Hormigón a tracción

Bastante más difícil, experimentalmente hablando, es la obtención del diagrama tensión-deformación del hormigón a tracción, por las dificultades que envuelve su ejecución.

El EC2 define a la resistencia a tracción del hormigón como la *máxima tensión que el hormigón puede soportar cuando está sometido a tracción uniaxial*, y propone la siguiente ecuación:

$$f_{ctm} = 0,30f_{ck}^{2/3} \quad [MPa] \quad (2)$$

La ecuación $\sigma_t - \varepsilon_t$ del hormigón, es decir en tracción uniaxial, adoptada, es la propuesta por Wang and Hsu (2001):

$$\sigma_t = \begin{cases} E_{cm}\varepsilon_t & \text{si } 0 \leq \varepsilon_t \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{ctm} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_t} \right)^{0,4} & \text{si } \varepsilon_t > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (3)$$

Esta ecuación toma en cuenta el fenómeno de *tension-stiffening*, es decir, la colaboración del hormigón a tracción entre fisuras. La deformación crítica a tracción ε_{cr} se tiene cuando $\sigma_t = f_{ctm}$, consecuentemente $f_{ctm} = \sigma_{cr} = E_{cm}\varepsilon_{cr}$, el cual nos permite averiguar que:

$$\varepsilon_{cr} = \frac{0,30f_{ck}^{2/3}}{1,2 \times 22(f_{ck} + 8)^{0,3}} \approx 0,068 \text{‰} \quad (f_{ck} = 25MPa) \quad (4)$$

2.1.3. Diagrama adoptado

Conforme a lo visto precedentemente, se adopta el siguiente diagrama para el hormigón:

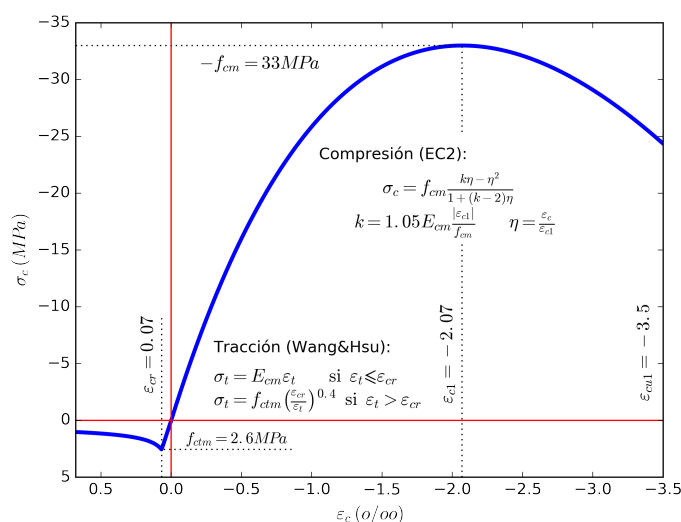


Figura 1 – Diagrama de hormigón adoptado. Compresión según el EC2:2004 y tracción según Wang and Hsu (2001).

2.2. Acero

Para el acero, se adopta directamente el diagrama propuesto en el EC2:2004. A continuación se describe las variables utilizadas y sus correspondientes valores (adoptados para los cálculos numéricos):

- $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ Resistencia característica del acero.
- f_{ym} : Resistencia media (5).
- $\gamma_s = 1,15$: Coeficiente de seguridad.
- $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$: Resistencia de cálculo.
- $E_s = 200 \text{ GPa}$: Módulo de elasticidad de diseño.
- $\varepsilon_{uk} = 10 \%$: Deformación unitaria característica en fuerza máxima².
- $\varepsilon_{ud} = 0,9\varepsilon_{uk}$: Deformación unitaria última de diseño
- $k = (f_t/f_y)_k = 1,10$: Valor característico³ de la relación entre la tensión máxima de rotura y el límite elástico.

²Es igual a la deformación unitaria media a fuerza máxima. EC2:2004 Annex C C.1 (3).

³Es igual a su valor medio (EC2:2004)

- $\rho_s = 7850 \text{ kg/m}^3$: Densidad.

La resistencia media del acero es (EC2:2004):

$$f_{ym} = f_{yk} + 10 \text{ (MPa)} \quad (5)$$

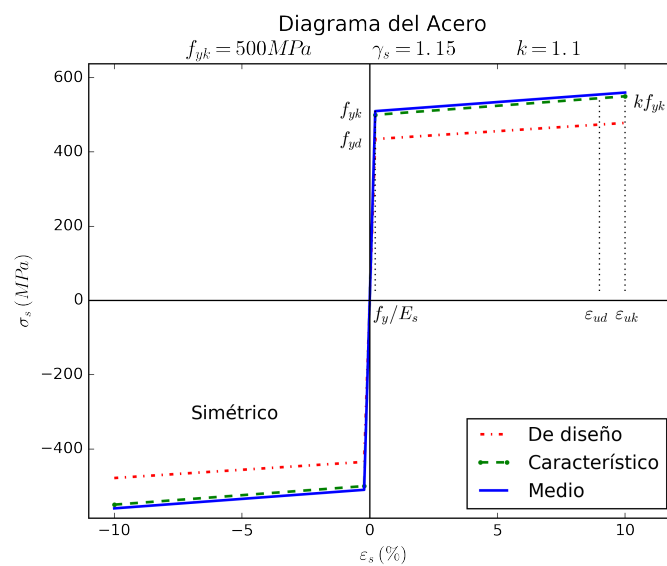


Figura 2 – Diagrama Tensión-Deformación del acero

3. DIAGRAMA DE MOMENTO - CURVATURA

3.1. Hipótesis básicas

Las siguientes, son hipótesis adoptadas para el análisis:

- Secciones planas y perpendiculares al eje de la viga, antes de la deformación, permanecen planas y perpendiculares al eje, después de la deformación (Viga de Euler-Bernoulli).
- Se considera adherencia perfecta entre el hormigón y el acero.
- El hormigón no está confinado.
- No existe resultante de fuerza axial.
- No se considera efectos de no linealidad geométrica

- f) Se limita el análisis a sección rectangular, aunque fácilmente el procedimiento es extendible a cualquier sección simétrica respecto a un eje vertical que pasa por el centro de gravedad de la sección bruta de hormigón.
- g) No se considera efectos de fluencia y retracción.

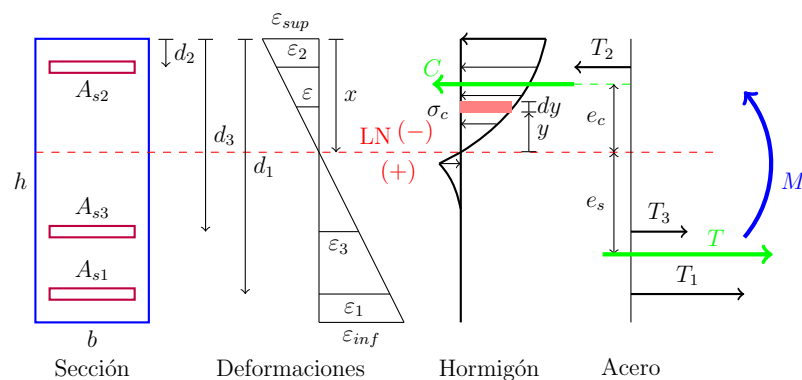


Figura 3 – Comportamiento esquemático de una sección de hormigón armado.

En base a la figura 3 escribimos las ecuaciones siguientes⁴:

$$\begin{aligned}
 \text{Compatibilidad: } \quad \kappa &= \frac{-\varepsilon_{sup}}{x} = \frac{\varepsilon_{inf}}{h-x} & \kappa &= \frac{-\varepsilon}{y} = \frac{\varepsilon_i}{d_i-x} \\
 \text{Acero:} & \quad T = \sum T_i = \sum \sigma_{s_i} A_{s_i} & e_s &= \frac{\sum T_i d_i}{T} - x \\
 \text{Hormigón:} & \quad C = \int_{x-h}^x b \sigma_c dy & e_c &= \frac{\int_{x-h}^x b \sigma_c y dy}{C} \\
 \text{Equilibrio:} & \quad T + C = 0 & M &= T(e_s + e_c)
 \end{aligned} \tag{6}$$

La ecuación $T + C = 0$ se debe cumplir en ausencia de fuerzas axiales. Como esta condición será revisada en una rutina computacional, es mejor escribirla de la siguiente manera:

$$|T + C| \leq tol \tag{7}$$

⁴Nótese que estas ecuaciones son válidas para cualquier sección transversal simétrica respecto a un eje vertical que pasa por su centro de área.

Donde tol es la tolerancia adoptada. Hemos verificado que la tolerancia definida a continuación es suficiente para nuestros propósitos:

$$tol := \frac{bh f_{cm}}{4000} \quad (8)$$

3.2. Proceso iterativo para la obtención del diagrama momento - curvatura

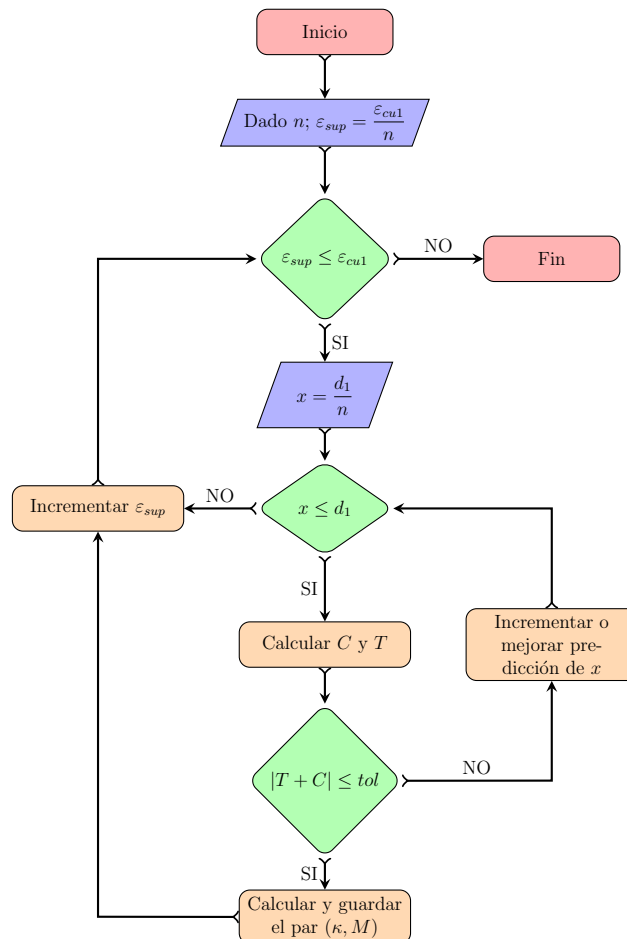


Figura 4 – Algoritmo utilizado para calcular el diagrama de momento - curvatura.

Aplicando el algoritmo de la figura 4 en **Python 3.5** podemos hacer varios análisis, por ejemplo, la influencia de las armaduras de piel y compresión en el diagrama Momento - Curvatura de una sección de hormigón armado. Tomamos una sección de $0,20m \times 0,60m$, adoptamos un armado dado y obtenemos lo siguiente:

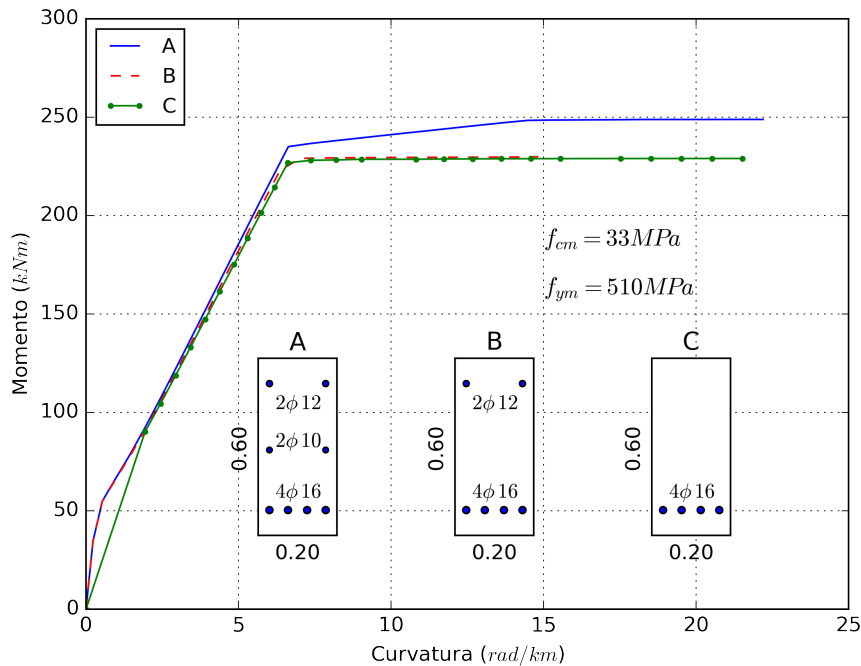


Figura 5 – Diagrama momento - curvatura de una sección de hormigón con diferentes armados. Vemos la influencia de las armaduras de piel y compresión. Fueron utilizados valores medios para las resistencias del hormigón y el acero.

4. CÁLCULO DE DEFORMACIONES CON EL DIAGRAMA MOMENTO - CURVATURA

La naturaleza compuesta del hormigón armado es un problema que intentaremos resolver de la siguiente manera:

El momento flector en una sección dada está directamente relacionado con la curvatura de la viga en la posición de la sección considerada, esta relación está dada en el diagrama de momento - curvatura la cual se convierte en una propiedad de la sección.

La rigidez EI podemos interpretar como la relación

$$EI = \frac{\text{momento}}{\text{curvatura}} \quad (9)$$

recordando la conocida fórmula de la flexión:



La Ingeniería Estructural, motor del desarrollo en América, en un marco de Integración y Sustentabilidad

$$\kappa = \frac{M}{EI} \quad (10)$$

La ecuación (10) es válida no solo para pequeñas deformaciones. Nuestro propósito es utilizar el factor EI en el modelo de elemento finito utilizando el diagrama de momento - curvatura⁵.

Por ejemplo, al calcular las deformaciones por el método de **elementos finitos**, utilizando como funciones de interpolación los polinomios de Hermite, encontramos la matriz de rigidez \mathbf{k}_e del elemento (Kassimali, 2012):

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Un método bastante adecuado para ser tratado con el diagrama momento - curvatura es el de la **carga unitaria**, en donde, la deflexión se calcula con:

$$\delta = \int_0^L \frac{M(x)\bar{M}}{(EI)_{(x)}} dx = \int_0^L \kappa_{(x)}\bar{M} dx \quad (12)$$

Es decir, se puede calcular la deflexión en un punto dado de la viga integrando en toda su longitud el producto de la función curvatura por la función momento flector para una carga unitaria.

Procedimiento:

1. Obtener el diagrama de momento flector en vigas estáticamente determinadas.
2. Realizar el diagrama de curvatura de la viga, utilizando el diagrama de momento - curvatura
3. En el caso del método de elemento finito:
 - a) Promediar el momento flector de sus extremos (M_{prom}), el cual es utilizado para la determinación de la curvatura promedio de este elemento κ_{prom} , así el cociente de estos valores determina el factor $EI = \frac{M_{prom}}{\kappa_{prom}}$ que será utilizado en la matriz de rigidez del elemento considerado.
 - b) Ensamblar la matriz de rigidez global de la estructura y seguir el procedimiento usual para cálculo de deformaciones, con lo cual obtenemos la deformada de la viga y en particular la flecha.

⁵Esta idea es tomada de Kwak and Kim (2002)

4. En el caso del método de la carga unitaria: realizar la integral indicada en (12).

Como es de esperarse, estos dos métodos devuelven exactamente el mismo resultado. Lo verificamos en la figura 6 que corresponde a la viga de la figura 7.

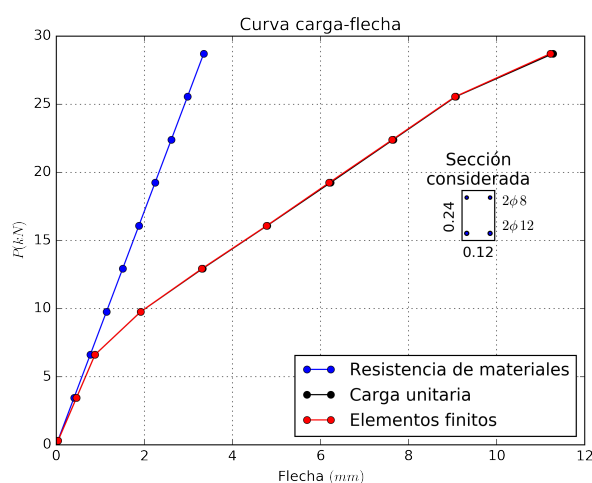


Figura 6 – Comparación de las flechas predichas por la teoría elemental de la mecánica de materiales y el modelo propuesto.

5. CONTRASTACIÓN DE RESULTADOS

5.1. Primera comparación

Se presenta como primer ejemplo las vigas VRA, VRB y VRC modeladas por Santos et al. (2014) con el paquete computacional de elementos finitos DIANA, utilizando una viga bi-apoyada con cargas puntuales en los tercios del vano, como se indica en la figura 7.

Para mayores detalles se debe recurrir a la referencia citada. La comparación de resultados se refleja en la figura 8.

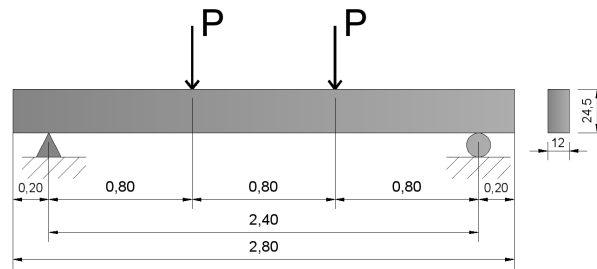


Figura 7 – Viga tipo, modelada por Santos et al. (2014)

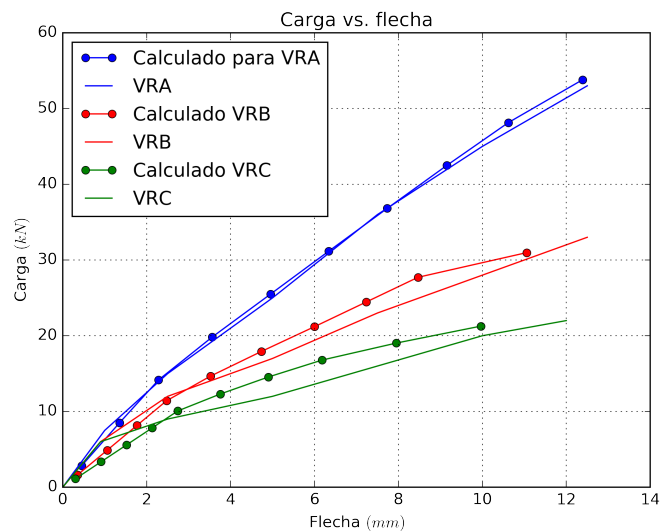


Figura 8 – Comparación de resultados entre el modelo propuesto y los presentados por Santos et al. (2014). Las líneas punteadas corresponden al modelo propuesto y las otras a las curvas de comparación.

5.2. Segunda comparación

Ahora se consideran las vigas ensayadas experimentalmente por Kaczmarek and Szymańska (2016), las cuales tienen la configuración mostrada en la figura 9.

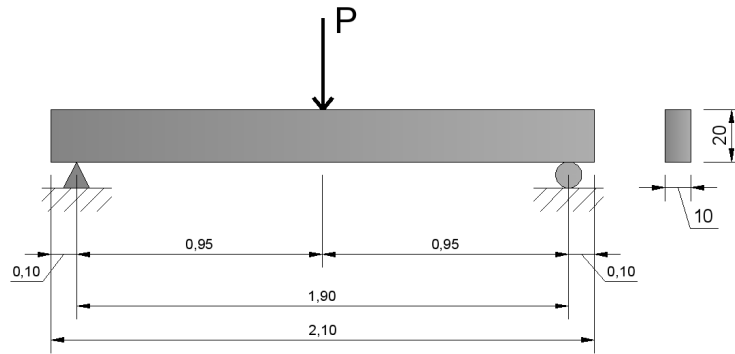


Figura 9 – Viga tipo ensayada experimentalmente por Kaczmarek and Szymańska (2016)

Igual que el caso anterior, se obvia los detalles referentes a los datos precisos de las vigas, ya que pueden corroborarse en la referencia citada. La comparación de resultados para este caso, se muestra en la figura 10. Las denominaciones dadas por estos investigadores a las vigas ensayadas fueron: B-001, B-002 y B-003.

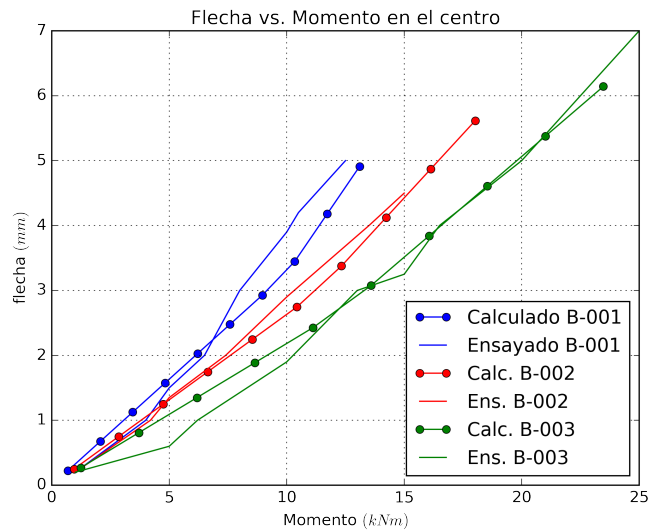


Figura 10 – Comparación de resultados entre el modelo propuesto y los presentados por Kaczmarek and Szymańska (2016). Las líneas punteadas corresponden al modelo propuesto y las otras a las curvas de comparación.



La Ingeniería Estructural, motor del desarrollo en América, en un marco de Integración y Sustentabilidad

6. CONCLUSIONES

Se ha presentado un método de cálculo puesto en una rutina computacional para la estimación de flechas (y desplazamientos en general) de vigas de hormigón armado utilizando el diagrama de momento - curvatura con el cual se toma en cuenta en una sola curva la naturaleza compuesta del hormigón armado y su comportamiento no lineal.

Se han definido todas las propiedades del hormigón y el acero según el EC2:2004 y se ha mostrado dos posibles metodologías de cálculo, utilizando elementos finitos y el método de la carga unitaria. Es posible así obtener no solo las flechas (deformaciones máximas) sino también toda la deformada de la viga.

Los autores consideran que los resultados obtenidos y contrastados con dos estudios realizados sobre el mismo tema, coinciden bastante bien y son suficientes para demostrar que el modelo simplificado propuesto se ajusta razonablemente, en la primera comparación, con un software computacional bastante avanzado en su modelo matemático, y en el segundo caso, la comparación es directamente con ensayos experimentales, y por lo tanto puede ser utilizado en los cálculos de ingeniería.



La Ingeniería Estructural, motor del desarrollo en América, en un marco de Integración y Sustentabilidad

Referencias

- Dan E Branson. *Deformation of concrete structures*. McGraw-Hill Companies, 1977.
- Jaime Calavera and L García Dutari. *Cálculo de flechas en estructuras de hormigón armado: forjados, losas, vigas de canto, vigas planas*. 1992.
- EC2:2004. Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. Standard, European Committee for Standardization, Brussels, April 2004.
- Mateusz Kaczmarek and Agnieszka Szymańska. Application of artificial neural networks to predict the deflections of reinforced concrete beams. In *Studia Geotechnica et Mechanica, Vol. 38, No. 2, Wroclaw, Poland*, 2016.
- Aslam Kassimali. *Matrix Analysis of Structures*. Cengage Learning, 2012.
- Hyo-Gyoung Kwak and Sun-Pil Kim. Nonlinear analysis of rc beams based on moment-curvature relation. *Computers & structures*, 80(7):615–628, 2002.
- Pedro Jiménez Montoya, Álvaro García Meseguer, Francisco Morán Cabré, and Juan Carlos Arroyo Portero. *Hormigón armado*. 15ta. edition, 2009.
- Ana Santos, Alex Leite, Alessandro De Araújo, Mylene Vieira, Alexandre Mont'Alverne, Leonardo Bezerra, Antonio Cabral, and Luiz Montenegro. Análise não linear de vigas de concreto armado considerando a fissuração. In *XXXVI Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Montevideo*, 2014.
- Taijun Wang and Thomas TC Hsu. Nonlinear finite element analysis of concrete structures using new constitutive models. *Computers & structures*, 79(32):2781–2791, 2001.